Werner Ziemann

Über das Wahre in der Mathematik und das Reale in der Physik

Sachbuch

Eine Formel für die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen $\leq n$

Frieling

Werner Ziemann

•

Über das Wahre in der Mathematik und das Reale in der Physik

Werner Ziemann

Über das Wahre in der Mathematik und das Reale in der Physik

Sachbuch

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Rheinstraße 46, 12161 Berlin
Telefon: 0 30 / 76 69 99-0
www.frieling.de

ISBN 978-3-8280-3310-8
1. Auflage 2016
Umschlaggestaltung: Michael Beautemps

Inhalt

Über das Wahre in der Mathematik
und das Reale in der Physik 7

Eine Formel für die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen $\leq n$ 17

Ein Axiomensystem für eine Mengenlehre unter
Ausschluss des Axioms der Teilmenge 26

Über das Wahre in der Mathematik und das Reale in der Physik

Antinomien sind teuflisch, man muß sie meiden, wo man nur kann; Paradoxien aber haben etwas Magisches, sie verleihen einem vermeintlich „Wissenden“ den Glanz etwas zu verstehen, was niemand verstehen kann. Ich denke dabei etwa an das Zwillingsparadoxon der Relativitätstheorie. Zunächst aber möchte ich mich der Mathematik und ihren Paradoxien zuwenden und – am Rande – eine Formel für die Anzahl der Primzahlen angeben.[1]

Das Zählen in eine Unendlichkeit hinein, das ist unsere Urvorstellung. Sie fand ein Ende mit der Cantorschen Mengenlehre.

Hinter dem 1,2,3, … soll es danach eine unendliche Zahl geben, Zeichen ω, mit der die Zählung neu beginnt und in eine sogenannte Überabzählbarkeit hinein fortgesetzt wird.

Kamkes Göschenbändchen war das erste Buch über Mengenlehre, das ich in die Hand bekam. Mich interessierten darin besonders die Schlußbemerkungen über die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“- die Antinomie von **Zermelo-Russel** – und „die Menge aller Mengen“ – die Antinomie von **Burali-Forti**.

Mit dem paradoxen $1 + \omega = \omega$, mit der Überabzählbarkeit und ihren von den Formalisten gefeierten Paradoxien wollte ich mich von Beginn an nicht abfinden.

Viele Jahre später erwarb ich die MENGENLEHRE (Einführung in die axiomatische Mengenlehre) von **Jürgen Schmidt**. Ich war mit meiner inhaltlichen Denkweise beim Formalismus angekommen.[2]

Formalistisch ist es, sich auf die formale Korrektheit, auf die Logik zu beschränken. Logik ist eine Notwendigkeit, aber das mathematisch Wahre, das Inhaltliche, geht darüber hinaus.

Versuchen wir es doch einmal, in das Unendliche hineinzuzählen! Dazu definieren wir die natürlichen Zahlen nach J. **v. Neumann** durch

$\mathbf{1} := \{ 0 \} = \{ \emptyset \}$
$\mathbf{2} := \{ 0, 1 \} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$
$\mathbf{3} := \{ 0, 1, 2 \} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} , \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$

usw.

Jede natürliche Zahl x hat so einen durch $x^+ = x \cup \{ x \}$ bestimmten Nachfolger.

Als allgemeine natürliche Zahl erhalten wir in anschaulicher Darstellung den Ausdruck

$\{ 0, 1, 2, 3 \ \ldots\} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} , \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \ \ldots]$

Je größer die Zahlen, desto weniger unterscheiden sie sich voneinander, so als würden im Unendlichen alle Zahlen in ein gleichbleibendes Element u übergehen. Wird die Klasse der natürlichen Zahlen dem v. Neumannschen Verfahren entsprechend durch den Klassenterm

$$(1) \quad u = \{ (x \mid 0 \epsilon^0 x \vee 0 = x) \wedge \bigwedge_y (y \epsilon^0 x \rightarrow (y^+ \epsilon^0 x \vee y^+ = x)) \}$$

definiert*), so folgt

* ϵ^0 anfängliches Zeichen für die Elementbeziehung

$$x \in^0 u$$

$$\rightarrow \left(\mathbf{0} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{x}^{+} \wedge \bigwedge_{\mathbf{y}} (\mathbf{y} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{x}^{+} \longrightarrow (\mathbf{y}^{+} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{x}^{+} \vee \mathbf{y}^{+} = \mathbf{x}^{+}) \right)$$

$$\rightarrow \mathbf{x}^{+} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{u}$$

und damit tatsächlich

$$(\mathbf{0} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{u}) \wedge \bigwedge_{\mathbf{y}} (\mathbf{y} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{y}^{+} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{u} \vee \mathbf{y}^{+} = \mathbf{u})$$

$$\rightarrow \mathbf{u} \in^{\mathbf{0}} \mathbf{u} \text{ und } \mathbf{u} = \mathbf{u}^{+}$$

(Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt, es also keine größte natürliche Zahl gibt, muß übrigens bereits ein $x \in^0 u$ mit $x \in^0 x$ existieren.)

Jedes $x \in^0 u$ außer der 0 hat dann, wie auch u selbst, einen unmittelbaren Vorgänger.

Vorgänger und Nachfolger unendlicher natürlicher Zahlen - und damit weitere Mengen des $\in^0$-Bereichs sind bisher nicht unterscheidbar. Eine Unterscheidung setzt eine neue Gleichheitsbeziehung voraus, die ihrerseits auf einer neuen Elementbeziehung – Zeichen $\in$ – beruhen müßte.

> Da die mit $\in$ gebildeten Terme sich formal von den bisherigen Termen unterscheiden, scheint es notwendig, neue Bezeichnungen für die Variablen und Terme (z.B. x^+) einzuführen. Darauf kann aber verzichtet werden, weil keine neuen Objekte eingeführt, sondern nur neue

Beziehungen zwischen den „vorhandenen“, im $\in^0$-Bereich eventuell einander gleichen Objekt en her gestellt werden sollen, die eine Unterscheidung wenigstens eines Teiles dieser Objekte ermöglichen. „Alle“ Objekte unterscheidbarmachen zu wollen – die Menge aller unterscheidbaren Objekte bilden zu wollen – würde zu einer Antinomie führen.

Auch das Zeichen = kann wie bisher als Gleichheitssymbol verwendet werden, weil jeweils klar sein wird, auf welcher Elementbeziehung es beruht.

Die natürlichen Zahlen des $\in$-Bereichs sollen im folgenden wie üblich Ordinalzahlen genannt, die Aussage „x ist Ordinalzahl“ mit OZ (x) bezeichnet werden.

Jede von 0 verschiedene Ordinalzahl soll auch im $\in$-Bereich einen unmittelbaren Vorgänger besitzen:

(2) $\bigwedge_{x} (OZ(x) \wedge x \neq 0 \rightarrow \bigvee_{y} y^{+} = x)$

Die Elementbeziehungen zwischen diesen Objekten aber werden eingeschränkt, d.h. die $\in$-Beziehung geht durch eine Einschränkung aus der $\in^0$-Beziehung hervor; mit

(3) $\mathbf{x} \in \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x} \in^{0} \mathbf{y}$

soll $x \in x$ nicht – der Elementbeziehung $x \in^0 x$ in (1) entsprechend – für alle unendlichen natürlichen Zahlen (Ordinalzahlen) gelten. Es soll also unendliche Ordinalzahlen geben, für die $x \notin x$ gilt, nämlich gerade diejenigen, die jetzt unterschieden werden sollen.

Diese Ordinalzahlen sollen zugleich Mengen – bezeichnet Mg(x) – und Elemente eines wieder eingeschränkten Bereichs, Zeichen $\in^1$ sein, während die anderen, für die im $\in$ -Bereich $x \in x$ gilt, eigentliche Klassen (Nichtmengen) sind.

Dementsprechend wird definiert:

$$(4)\ OZ(x) \wedge Mg(x) \leftrightarrow OZ(x) \wedge x \notin x$$

und allgemein für die Mengen des $\in^1$-Bereichs

$$(5)\quad x \in y \wedge Mg(x) \leftrightarrow x \in^1 y$$

Da im $\in$1-Bereich nicht alle Ordinalzahlen Mengen sein können, bleibt nun zu untersuchen, wie weit der Bereich der x mit $OZ(x) \wedge Mg(x)$ ausgedehnt werden kann.

Zunächst folgt aus (4):

$$(6)\quad OZ(x) \wedge Mg(x) \leftrightarrow OZ(x^+) \wedge Mg(x^+)$$

Ist eine Ordinalzahl Menge, so sind es auch die „benachbarten" Ordinalzahlen. Jede solche Ordinalzahl ist also in eine Folge von Ordinalzahlen eingebettet, die ebenfalls Mengen sind. Wo enden diese Folgen?

Die Klasse aller dieser Ordinalzahlen, $\{ x | OZ(x) \wedge Mg(x)\}$,

sie stimmt mit der Vereinigung $\bigsqcup_{OZ(x) \wedge Mg(x)} x$ überein,

kann nicht Menge sein; als Allklasse ist sie antinomisch.

Aber auch der Durchschnitt der unendlichen Ordinalzahlen, die Mengen sind, also die Klasse

$$\bigcap\limits_{\mathrm{OZ}(x) \wedge \mathrm{Mg}(x) \wedge \neg \mathrm{End1}(x)} x$$

kann nach (2) nicht Menge sein.[**]

Im Gegensatz zur klassischen Mengenlehre kann demnach eine Klasse, die nicht Menge ist, Teil einer Menge sein; das Axiom der Teilmenge gilt nicht!

Insbesondere gibt es keine kleinste unendliche Ordinalzahl, die zugleich Menge ist!

> Die Folgen von Ordinalzahlen nach (6) gehen „oben" wie „unten" in stationäre Folgen von „Ordinalklassen" über, die nicht Mengen sind.

Damit deutet sich der Übergang zur klassischen Theorie an: in ihr gilt das Axiom der Teilmenge, nicht aber (2); insbesondere hat das ω der klassischen Theorie keinen unmittelbaren Vorgänger, d.h. beim Übergang auf diese Theorie wird der $\in^1$-Bereich durch „Abschneiden" der Vorgänger bestimmter Ordinalzahlen vermittels des Axioms der Teilmenge auf einen $\in^2$-Bereich eingeschränkt!

Mit der Mengenbezeichnung $\mathcal{M}g(x)$ für den $\in^2$-Bereich gilt also

$$(7)\ \mathcal{M}g(x) \rightarrow \mathrm{M}g(x)$$

** Endl(x) Abkürzung für „x ist endlich" und für ω im $\in^2$ –Bereich wegen des dort geltenden Axioms der Teilmenge:

$$(8) \quad \neg \bigvee_{x} x^+ = \omega$$

d .h. ω ist - der klassischen Theorie entsprechend - im $\in^2$-Bereich die kleinste unendliche Ordinalzahl und zugleich Menge. ω enthält also nur endliche Ordinalzahlen (natürliche Zahlen).

Auf diese Eigenschaft gründet sich der Begriff der Abzählbarkeit: ω ist im $\in^2$ –Bereich der Prototyp einer abzählbaren Menge. Im $\in^1$ –Bereich dagegen enthält ω „beliebig viele" unendliche Ordinalzahlen; der Begriff der Abzählbarkeit verliert dort seinen Sinn. Das Axiom der Teilmenge - und damit insbesondere die Bedingung (8) - ist offenbar Voraussetzung für die vermeintliche Existenz nichtabzählbarer Mengen.

Die ganze Theorie der Mächtigkeiten fällt ohne die Einschränkung des $\in^1$-Bereichs auf den $\in^2$-Bereich in sich zusammen. Dabei werden durch diese Einschränkung nicht etwa neue Mengen gebildet, sondern vorhandene Mengen eliminiert!

Die durch den $\in^1$ –Bereich bestimmte Mengenlehre genügt meinem im **Frieling-Verlag** veröffentlichten [3)] „Axiomensystem für eine Mengenlehre unter Ausschluß des Axiom der Teilmenge" mit einem Unterschied:

Die natürlichen Zahlen sind nicht nach dem v. **Neumann**-schen Verfahren konstruiert, sondern sie entsprechen, dem

Axiom der Fundierung zufolge, das dieses Verfahren gerade ausschließt, der Definition von **Robinson** (1937).

Bleiben wir beim $\in$-Bereich! In ihm gibt es keine Überabzählbarkeit, keine unerreichbaren Zahlen. Man kann in ihm rechnen wie im endlichen Bereich; man braucht dazu keine Nichtstandardarithmetik. Paradoxien treten in ihm nicht auf.

Die *Paradoxien der klassischen Mengenlehre*, besonders extrem der Satz über die Punktmengen auf der Kugel, sind im Grunde alle eine Folge der Überabzählbarkeit. Galileis eineindeutige Zuordnung der natürlichen Zahlen und der Quadratzahlen ist, wie jede andere Äquivalenz von Zahlenfolgen, ohne das mit der Überabzählbarkeit verbundene Axiom der Teilmenge (!), ohne die Annahme Mg (ω) keine Paradoxie (siehe auch **Oberschelp**, „Allgemeine Mengenlehre", S.105, BI-Wiss. - Verl. 1994).

Paradoxien sind eine Folge einer falschen Theorie, falscher Annahmen, Voraussetzungen -(Inkommensurabilität von Strecken, Größen, **Zenon**: Dichotomie, **Achilles** und die Schildkröte, …).

Das gilt auch für die Paradoxien der Physik!

Mathematiker sind keine Schöpfer, keine Erfinder, sie sind Entdecker!

Für Physiker scheint das selbstverständlich zu sein. Zur Physik also:

Wenn die Überabzählbarkeit fortfällt, sind unendliche Zahlen und Mengen physikalisch nicht erreichbar. Es gibt dann